Analiza III, pismeni ispit, 31.08.2015.

1. Naći ekstreme funkcije $z = e^{-2x^2}(x - y^2)$.

2. (60%)(a) Izračunati $\displaystyle\iint\limits_D (a^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ako je oblast integracije D polukrug $x^2+y^2 = ax$ u prvom oktantu (unutrašnjost datog kruga za koji je $x \geq 0$, $y \geq 0$).

(40%)(b) Dati dvostruki integral $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ izračunati isključivo uvođenjem smjena promjenjivih $u = x + y$, $v = x - 2y$, ako je oblast integracije D paralelogram u $x0y$-ravni čiji su vrhovi $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(0, 1)$.

3. Primjenom krivoliniskog integrala, naći površinu figure, ograničenu zatvorenom krivom
(i) elipsom $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$;
(ii) petljom dekartovog ista $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

4. Izračunati fluks vektorskog polja $\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$ po unutrašnjoj strani sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

VAŽNO: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije predavanja rješenja numerišite svaku stranicu brojem oblika: broj-stranice/broj-strana...

Analiza III, pismeni ispit, 31.08.2015.

1. Naći ekstreme funkcije $z = e^{-2x^2}(x - y^2)$.

2. (60%)(a) Izračunati $\displaystyle\iint\limits_D (a^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ako je oblast integracije D polukrug $x^2+y^2 = ax$ u prvom oktantu (unutrašnjost datog kruga za koji je $x \geq 0$, $y \geq 0$).

(40%)(b) Dati dvostruki integral $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ izračunati isključivo uvođenjem smjena promjenjivih $u = x + y$, $v = x - 2y$, ako je oblast integracije D paralelogram u $x0y$-ravni čiji su vrhovi $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(0, 1)$.

3. Primjenom krivoliniskog integrala, naći površinu figure, ograničenu zatvorenom krivom
(i) elipsom $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$;
(ii) petljom dekartovog lista $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

4. Izračunati fluks vektorskog polja $\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$ po unutrašnjoj strani sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

VAŽNO: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije predavanja rješenja numerišite svaku stranicu brojem oblika: broj-stranice/broj-strana...

(#) Nađi ekstreme f-je $z = e^{-2x^2}(x-y^2)$.

Rj. Nađimo stacionarne tačke

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-2x^2}\cdot(-4)x(x-y^2)+e^{-2x^2}\cdot 1 = e^{-2x^2}(-4x^2+4xy^2+1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-2x^2}\cdot(-2)y = -2ye^{-2x^2}$$

$$e^{-2x^2}(-4x^2+4xy^2+1)=0$$
$$-2y\,e^{-2x^2}=0$$

e^{-2x^2} je uvijek pozitivno

$$-4x^2+4xy^2+1=0$$
$$-2y=0 \Rightarrow y=0$$

$$-4x^2+1=0$$
$$x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2}$$

Stacionarne tačke su $M_1(-\frac{1}{2},0)$ i $M_2(\frac{1}{2},0)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-2x^2}\cdot(-4x)(-4x^2+4xy^2+1)+e^{-2x^2}(-8x+4y^2) =$$
$$= e^{-2x^2}(16x^3-16x^2y^2-4x-8x+4y^2) = e^{-2x^2}(16x^3-16x^2y^2-12x+4y^2)$$
$$=4e^{-2x^2}(4x^3-4x^2y^2-3x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^{-2x^2}(8xy) = 8xye^{-2x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2e^{-2x^2}$$

Za tačku $M_1(-\frac{1}{2},0)$

$$A=4e^{-2\cdot\frac{1}{4}}\left(4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 0-3\left(-\frac{1}{2}\right)+0\right)=4e^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{\sqrt{e}}$$

$$B=0,\ C=-2e^{-2\cdot\frac{1}{4}}=-2e^{-\frac{1}{2}}=\frac{-2}{\sqrt{e}}$$

$$D=AC-B^2=\frac{-8}{e}<0$$

F-ja z u tački M_1 nema ekstrem

Za tačku $M_2(\frac{1}{2},0)$

$$A=4e^{-2\cdot\frac{1}{4}}\left(4\cdot\frac{1}{8}-0-3\cdot\frac{1}{2}+0\right)=$$
$$=4e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{-4}{\sqrt{e}}$$

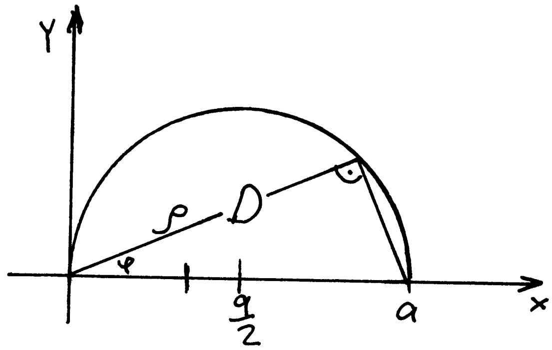
$$B=0,\ C=-2e^{-2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{-2}{\sqrt{e}}$$

$D=AC-B^2=\frac{8}{e}>0 \Rightarrow$ f-ja z u tački M_2 ima ekstrem

$A<0 \Rightarrow z_{max}(\frac{1}{2},0)=e^{-2\cdot\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{e}}$

Izračunati $\iint_D (a^2-x^2-y^2)\,dx\,dy$ ako je oblast integracije D polukrug $x^2+y^2=ax$ u prvom oktantu (unutrašnjost datog kruga za koji $x \geq 0$, $y \geq 0$).

Rj: Skicirajmo oblast integracije D



$$x^2+y^2=ax$$

$$x^2-ax+y^2=0$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

uvodimo polarne koordinate

$$x=\rho\cos\varphi$$
$$y=\rho\sin\varphi$$
$$dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$\cos\varphi=\frac{\rho}{a}$$

$$\rho=a\cos\varphi$$

$$D \xrightarrow{\text{transformiši}} D':\begin{cases} 0\leq\rho\leq a\cos\varphi \\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$x^2+y^2=\rho^2$$

$$a^2-x^2-y^2=a-\rho^2$$

$$\iint_D (a^2-x^2-y^2)\,dx\,dy = \left|\begin{array}{c}\text{uvodimo}\\ \text{polarne}\\ \text{koordinate}\end{array}\right| = \iint_{D'}(a^2-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

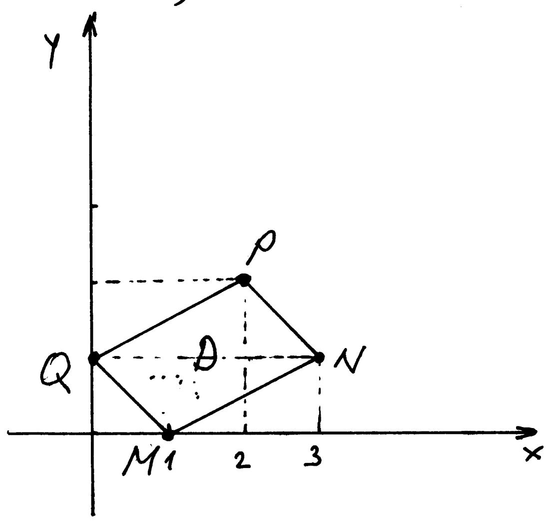
$$=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}(a^2\rho-\rho^3)\,d\rho=\int_0^{\pi/2}\left(a^2\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^{a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi-\frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi=\left|\begin{array}{l}\text{znamo da ako su cos ili sin parnog}\\ \text{stepena tada koristimo neke od smjena}\\ \sin^2\varphi=\frac{1}{2}(1-\cos2\varphi),\quad \cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)\\ \text{i ovo je jedan od načina za rješavanje...}\end{array}\right|$$

$$=\dots\ \text{LAGANA VJEŽBA}\ =\frac{a^4}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{a^4}{4}\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{a^4\pi}{64}(8-3)=\frac{1}{64}5\pi a^4$$

(#) Izračunati $\iint\limits_D (x+y)^2\,dx\,dy$ ako je D paralelogram u xOy-ravni čiji su vrhovi $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(0,1)$ uvođenjem smjena $u=x+y$, $v=x-2y$.

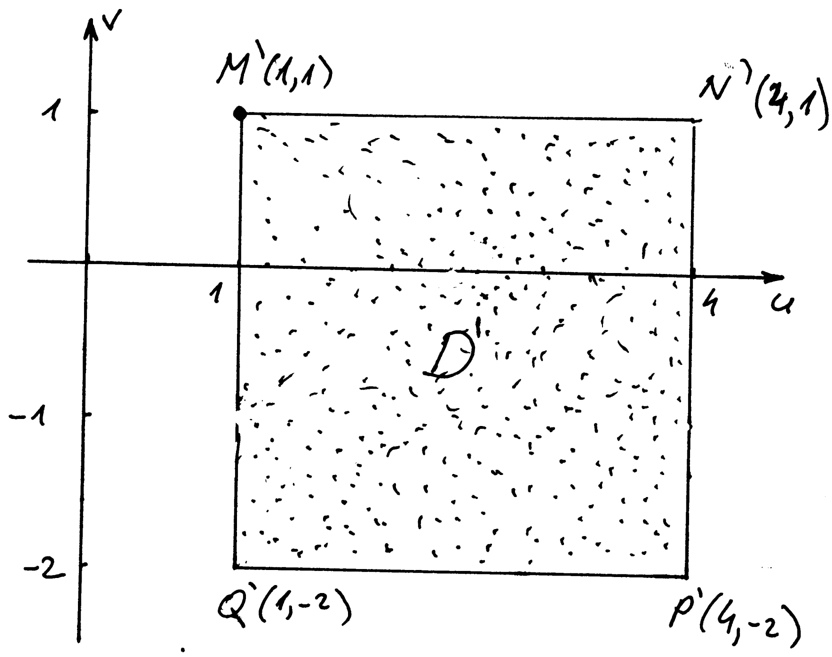
Rj. Nacrtajmo dati paralelogram $\square MNPQ$, gdje su $M(1,0)$, $N(3,1)$, $P(2,2)$, $Q(0,1)$.



Primjetimo da uvođenjem smjena tačka $M(1,0)$ će se transformisati u tačku $M'(1,1)$, tačku N će se transformisati u tačku $N'(4,1)$, tačka $P(2,2)$ u tačku $P'(4,-2)$ i tačka Q u tačku $Q'(1,-2)$.

Drugim riječima oblast D se transformiše u oblast D'.

$$D' : \begin{cases} 1 \le u \le 4 \\ -2 \le v \le 1 \end{cases}$$



Na kraju, s obzirom da koristimo formulu

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \left| \begin{array}{c} \text{ako uvedemo smjene} \\ x=\mu(u,v) \quad y=\eta(u,v) \\ J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \end{array} \right| = \iint\limits_{D'} f(\mu(u,v),\eta(u,v))\,|J|\,du\,dv$$

(gdje se J naziva Jakobijan)

ostalo je još da odredimo Jakobijan.

$$\begin{array}{r} u = x + y \\ - \quad v = x - 2y \\ \hline u - v = 3y \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2u = 2x + 2y \\ + \quad v = x - 2y \\ \hline 2u + v = 3x \end{array} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$3y = u - v \qquad x = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v$$

$$y = \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v$$

Sad nije teško izračunati dati integral

$$\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy = \left| \begin{array}{l} \text{uvodimo smjene} \\ u = x + y \\ v = x - 2y \end{array} \Rightarrow dx\,dy = \frac{1}{3}\,du\,dv \quad \begin{array}{l} D \xrightarrow{\text{transf}} D' : \begin{cases} 1 \le u \le 4 \\ -2 \le v \le 1 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y = u \\ (x+y)^2 = u^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-2}^{1} dv \int_{1}^{4} u^2 \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} \frac{1}{3}u^3\Big|_1^4\,dv = 7\int_{-2}^{1} dv = 21$$

(#) Primjenom krivolinijskog integrala, naći površinu figure, ograničenu zatvorenom krivom

(i) elipsom $x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$

(ii) petljom dekartovog lista $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Rj. Prisjetimo se da površinu figure koja je ograničena zatvorenom krivom C računamo po formuli

$$P = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Ako kojim slučajem ovu formulu neznate napamet ili niste sigurni kako izgleda, ova formula se lagano može izvesti pomoću formule Greena

$$\oint_C x\,dy - y\,dx = \left|\begin{array}{c}\text{formula}\\ \text{Greena}\end{array}\right| = \iint_D (1+1)\,dx\,dy = 2\iint_D dx\,dy = 2P$$

D → oblast ograničena krivom C

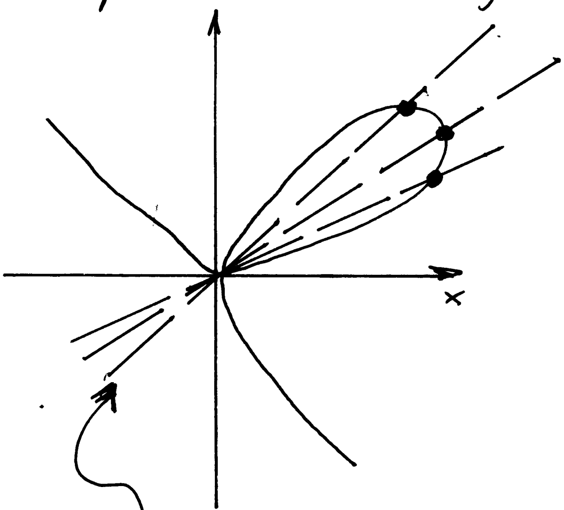
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(i)

$$P = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \left|\begin{array}{l} C: \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \\ dx = -a\sin\varphi\,d\varphi \\ dy = b\cos\varphi\,d\varphi \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(a\cos\varphi\cdot(b\cos\varphi) - b\sin\varphi(-a\sin\varphi)\Big)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} d\varphi = \pi ab$$

(ii) "Najteži" dio u drugom dijelu zadatka je parametrizirati krivu c. Ranije smo vidjeli da se proizvoljna kriva u ravni može parametrizirati ili pomoću familije pravih ili pomoću familije krugova ili pomoću familije elipsi, ili pomoću familije parabola itd.



Primjetimo da kako ovu pravu pomjeramo (kako mijenjamo ugao između prave i x-ose) to će se i tačka presjeka prave i krive pomjerati

Pokušajmo dekartov list parametrizirati pomoću familije pravih

$$y = xt$$

Tada:

$$x^3 + (xt)^3 - 3ax(xt) = 0$$

$\vdots$ LAGANA VJEŽBA

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

Time

$$P = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \ldots = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2}\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_0^R (1+t^3)^{-2}\,d(1+t^3) = \frac{3a^2}{2}\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{1+t^3}\Big|_0^R = \frac{3a^2}{2}$$

(#) Izračunati fluks vektorskog polja

$$\vec{v} = (x, -y^2, x^2+z^2-1)$$

po unutrašnjoj strani sfere $x^2+y^2+z^2=1$.

Rj

Prisjetimo se

Fluks vektorskog polja se računa po formuli

$$\Phi = \iint_S v_x\,dy\,dz + v_y\,dx\,dz + V_z\,dx\,dy$$

U našem slučaju

$$\Phi = \iint_S x\,dy\,dz - y^2\,dx\,dz + (x^2+z^2-1)\,dx\,dy$$

gdje je S unutrašnja strana sfere sa centrom u $C(0,0,0)$ poluprečnika 1.

Ako iskoristimo formulu Gauss-Ostrogradski imamo

$$\Phi = \iiint_\Omega (1-2y+2z)\,dx\,dy\,dz =$$

Ω je unutrašnjost date sfere - ako uvedemo sferne koordinate imamo

$x = \rho \sin\varphi \cos\alpha$

$y = \rho \sin\varphi \sin\alpha$

$z = \rho \cos\varphi$

$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\alpha$

$$\Omega \xrightarrow{\text{transformiše}} \Omega' : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \alpha \le 2\pi \end{cases}$$

$$= \iiint_{\Omega'} (1 - 2\rho\sin\varphi\sin\alpha + 2\rho\cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1} \left(\rho^2 \sin\varphi - 2\rho^3 \sin^2\varphi \sin\theta + 2\rho^3 \sin\varphi \cos\varphi\right) d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^1 \sin\varphi - 2\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1 \sin^2\varphi \sin\theta + 2\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1 \sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3}\sin\varphi - \frac{1}{4}(1-\cos 2\varphi)\sin\theta + \underbrace{\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\Big)\, d\varphi}_{-\frac{1}{2}\cos\varphi\, d(\cos\varphi)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}\underbrace{\cos\varphi\Big|_0^{\pi}}_{-1-1} - \frac{1}{4}\sin\theta\left(\underbrace{\varphi\Big|_0^{\pi}}_{\pi} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}}_{0-0}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\cos^2\varphi\Big|_0^{\pi}}_{1-1=0}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\pi\sin\theta\right) d\theta = \frac{2}{3}\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\pi\underbrace{\cos\theta\Big|_0^{2\pi}}_{1-1} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

$$1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$